



دانشگاه فنی و حرفه ای

دانشگاه فنی و حرفه ای خراسان شمالی

آموزشکده فنی و حرفه ای ایران شروان

برنامه درسی جلسه سوم

موضوع: جمعیر بول

گردآورنده: قوی هسل

برنامه درسی جلسه چهارم

موضوع: مجموع منسرم ها و فالسرم ها

گردآورنده: قوی هسل

برنامه درسی جلسه پنجم

موضوع: ساده سازی توابع با استفاده از جدول کارنو

اسفند ۱۳۹۸

گردآورنده: قوی هسل

①

Year.

Month.

Date.

Subject

جزوہ دین و دنیا کی منطق

بنا خدا

نفل دوم : جبر بول

\* قوانین حکم بر جبر بول

① اصل جابجائی

$$A \times B = B \times A$$

$$A + B = B + A$$

② اصل عضوی اثر

$$A + 0 = A$$

$$A \times 0 = 0$$

$$A \times 1 = A$$

$$A + 1 = 1$$

③ اصل شرکت پذیری

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

④ اصل توزیع پذیری

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$



$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

⑤ اصل خود توانی

$$a + a = a$$

$$a \cdot a = a$$

⑥ صمیم صمیم

$$a'' = a$$

⑦ اصل صمیم

$$A + A' = 1$$

$$A \cdot A' = 0$$

⑧ قانون جذب

$$A + A \cdot B = A$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

⑨ قانون دموکان

$$(A + B)' = A' \cdot B'$$

$$(A \cdot B)' = A' + B'$$

مثال) توابع بولی زیر را با حداقل لیترال ها ساده کنید.

$$1) x(x' + y) = xx' + xy = 0 + xy = xy$$

بر اساس اصل

توزیع پذیری

۳

Year. \_\_\_\_\_ Month. \_\_\_\_\_ Data. \_\_\_\_\_ Subject \_\_\_\_\_

$$۲) x + x'y = (x + x')(x + y) = 1(x + y) = x + y$$

$$۳) f(x, y, z) = \underline{xy} + \underline{x'y}z + \underline{xy}z' + \underline{x'y}z' + \underline{xyz}$$

$$f(x, y, z) = xy(1+z) + x'yz + xz'(y+y')$$

از عوامل مشترک فاکتورگیری می‌کنیم

$$f(x, y, z) = \underline{xy} + \underline{x'y}z + xz'$$

\* عبارت ها داخل پرانتز طبق اصل عضوی اند

$$f(x, y, z) = y[(x + x'z)] + xz'$$

و اصل متمم یک می‌شود.

از عوامل مشترک فاکتورگیری می‌کنیم سپس عبارت های داخل پرانتز را از رؤس اصل

توزیع پذیری حل می‌کنیم

$$f(x, y, z) = y[(x + x')(x + z)] + xz'$$

$$f(x, y, z) = y[1(x + z)] + xz' \Rightarrow y(x + z) + xz'$$

$$f(x, y, z) = \boxed{xy + xz + xz'}$$

(۴)

Year.

Month.

Date.

Subject

مثال) تابع  $Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC + A\bar{B}C$  را با حداقل اشیاء ساده کنید.

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC + A\bar{B}C$$

جد اول      جد دوم      جد سوم      جد چهارم      جد پنجم

ابتدا تابع را ساده کردیم

حالا پس از عوامل مشترک

$$Y = \bar{A}\bar{B}(\bar{C} + C) + AB(\bar{C} + C) + A\bar{B}C$$

از جمله اول و دوم      از جمله سوم و چهارم

فالتو، لکوی می کنیم

عبارت های داخل پرانتز طبق اصل مقم یک می شود

$$Y = \bar{A}\bar{B} + AB + A\bar{B}C$$

$$Y = \bar{A}\bar{B} + (AB + A\bar{B})(AB + C)$$

طبق اصل توزیع پذیری

$$Y = \bar{A}\bar{B} + [A(B + \bar{B})](AB + C)$$

$$Y = \bar{A}\bar{B} + A(AB + C) = \bar{A}\bar{B} + \underbrace{AAB}_{\text{طبق اصل خودکامی}} + AC = \boxed{\bar{A}\bar{B} + AB + AC}$$

طبق قانون

توزیع پذیری

اصل خودکامی

مثال) تابع زیر را با توابع جبر بول ساده کنید

$$F(x, y, z) = \underline{x'y'z} + \underline{x'yz} + \underline{xy'z} + \underline{xyz}$$

$$F(x, y, z) = \underline{x'z(y' + y)} + \underline{xz(y' + y)} \Rightarrow x'z + xz$$

طبق اصل مقم

$$\Rightarrow z(x' + x) = z$$



(5)

Year.

Month.

Date.

Subject

تمرین (تابع بولی زیر را با حداقل سترال ها ساده کنید)

$$1) Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C$$

$$2) Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}C$$

\* فرم استاندارد توابع بولی:

یک تابع بولی را در صورتی فرم استاندارد بولی می گویند که در هر جمله آن همه متغیرها از جمله خود متغیر یا NOT آن ظاهر شده باشد.

برای مثال، تابع  $Y = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$  یک تابع استاندارد بولی

است زیرا در هر جمله آن هر سه متغیر A، B، C به صورت متغیر اصلی یا

NOT شده ظاهر شده اند

تابع  $Y = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{B}C$  یک تابع استاندارد بولی نیست زیرا در

جمله چهارم آن متغیر A یا NOT آن ظاهر نشده است با استفاده از قوانین

جبر بولی برای استاندارد کردن جمله چهارم کافی است به صورت زیر عمل کنیم و

هر یک از عباراتی را که در تابع وجود ندارد در یک ضرب کنیم و با جای یک تابع



9

Year.

Month.

Data.

Subject

$(\bar{A}+A)$  یا  $(\bar{B}+B)$  یا  $(\bar{C}+C)$  را قرار دهیم

$$\bar{B}C = \bar{B}C(A + \bar{A}) \Rightarrow A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C$$

مثال تابع  $Y = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}C + BC$  را با توابع جبر بول ساده کنید

ابتدا تابع را به فرم استاندارد درمی آوریم.

$$Y = \bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) + \bar{A}C(B + \bar{B}) + BC(A + \bar{A})$$

$$Y = \underbrace{\bar{A}\bar{B}C}_1 + \underbrace{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}_2 + \underbrace{\bar{A}BC}_3 + \underbrace{\bar{A}\bar{B}C}_4 + \underbrace{ABC}_5 + \underbrace{\bar{A}BC}_6$$

جمله های سوم و پنجم و جمله های اول و چهارم تکراری است پس طبق قانون

جبر بول یکی از آنها را حذف می کنیم  $Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + ABC$

$$Y = \bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) + BC(\bar{A} + A) = \bar{A}\bar{B} + BC$$

\* مجموع فنسترم ها:

آلردر هر عبارت مجموع حاصل ضرب ها، با همان تعداد متغیری که در تابع وجود

دارد متغیرها یا مکمل های (NOT) آنها وجود داشته باشند آن عبارت



را مینویسیم

۷

Year. \_\_\_\_\_ Month. \_\_\_\_\_ Data. \_\_\_\_\_ Subject \_\_\_\_\_

به طور مثال یکی از مستخرج های تابع  $Y$  با سه ورودی متغیر  $A$  و  $B$  و  $C$  می توان

به شکل زیر نوشت:

$$Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

« جدول صحت تابع  $Y$  با سه ورودی »

شماره سطر جدول	ورودی ها			خروجی
	A	B	C	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1 → $\bar{A}\bar{B}C$
2	0	1	0	1 → $\bar{A}B\bar{C}$
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1 → $A\bar{B}\bar{C}$
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1 → $ABC$

خروجی تابع در سطرهای ۱، ۲، ۴ و ۷ یک است رابطه خروجی را بنا به شماره سطرها

چنین می نویسیم:

$$Y = \sum m (m_1, m_2, m_4, m_7)$$

$$Y = \sum m (1, 2, 4, 7)$$

علامت سطر

به معنای حاصل می باشد

\* نرم استاندارد مستخرج کردن تابع | ① تبدیل تابع به مجموع جملات AND شده

② آیا در هر تابع متغیرها وجود دارند

③ AND کردن جمله بدون متغیر با  $(x+x)$  (متغیر  $x$  در جمله نباشد)

④ حذف جملات اضافی



①

Year.

Month.

Date.

Subject

مثال) تابع بولی  $F = A + \bar{B}C$  را بصورت جمع مinterm ها درآورید.

حل: تابع سه متغیر  $A$ ،  $B$ ،  $C$  دارد در اولین جمله  $A$  دو متغیر کم دارد

$$F = A(B + \bar{B}) \Rightarrow AB + A\bar{B} \quad \text{بنابراین}$$

$$F = AB(C + \bar{C}) + A\bar{B}(C + \bar{C}) \quad \text{این تابع هنوز هم یک متغیر کم دارد.}$$

$$\Rightarrow ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$$

$$\bar{B}C \Rightarrow \bar{B}C(A + \bar{A}) \Rightarrow A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C \quad \text{جمله دوم } \bar{B}C \text{ یک متغیر کم دارد.}$$

با ترکیب همه جملات داریم.

$$F = A + \bar{B}C = ABC + AB\bar{C} + \underline{A\bar{B}C} + \underline{A\bar{B}\bar{C}} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

طبق مرحله چهارم نرم افزار مinterm کردن جملاتی که چندبار تکرار شده اند

$$F = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C \quad \text{واحذف می کنیم}$$

با مرتب کردن مinterm ها به ترتیب صعودی داریم

$$F = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

$$\Rightarrow m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$



9

Year.

Month.

Data.

Subject

نشان:

تابع بولی  $f(x, y, z) = x + xy + z + x'y'z + z$  را به صورت جمع مinterm ها در آورید.

\* ضرب مinterm ها:

اگر در هر عبارت حاصل ضرب مجموع ها، همان تعداد متغیری که در تابع وجود دارد متغیرها یا مکمل های (NOT) آنها وجود داشته باشند آن را مinterm

می گویند مثلاً عبارت  $Y$  یک عبارت مinterm است که در آن:

$$Y = (\bar{A} + B + \bar{C})(A + \bar{B} + \bar{C})(A + \bar{B} + C)$$

معوضه یک عبارت مinterm را می توان به صورت زیر نیز نشان داد

$$Y = \pi_m(m_2, m_3, m_5) \Rightarrow Y = \pi_m(2, 3, 5)$$

که می نامیم (توسعه ضرب)

« جدول هست خروجی مinterm  $Y$  »

شماره سطر جدول	خروجی ها			خروجی
	A	B	C	Y
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0 → $A + \bar{B} + C$
3	0	1	1	0 → $A + \bar{B} + \bar{C}$
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0 → $\bar{A} + B + \bar{C}$
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1



۱۰

Year. \_\_\_\_\_ Month. \_\_\_\_\_ Data. \_\_\_\_\_

Subject \_\_\_\_\_

۱) تبدیل تابع بصورت جملات OR شده

۲) یا در هر تابع تمام متغیرها وجود دارند

۳) OR کردن جمله بدون متغیر یا (مثلاً) (متغیر) در جمله نباشد

۴) حذف جملات اضافی

مثال

تابع بول  $F = xy + x'z$  را بصورت ضرب متغیرها نشان دهید

حل: ابتدا تابع را با استفاده از اصل توزیع پذیری به فرم جملات OR شده

$$F = xy + x'z = (xy + x')(xy + z) \quad \text{تبدیل می‌کنیم}$$

$$= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z) \Rightarrow (x' + y)(x + z)(y + z)$$

\* تابع سه متغیر دارد:  $x, y, z$ . هر جمله OR فاقد یک متغیر است، بنابراین

$$① \quad x' + y = x' + y + zz' \Rightarrow (x' + y + z)(x' + y + z')$$

$$② \quad x + z = x + z + yy' \Rightarrow (x + y + z)(x + y' + z)$$

$$③ \quad y + z = y + z + xx' \Rightarrow (x + y + z)(x' + y + z)$$

با ترکیب همه جملات و حذف تکراری‌ها، خواهیم داشت

ایلمنتال

$$F = (x+y+z)(x+y'+z)(x'+y+z)(x'+y+z')$$

$$\Rightarrow m_0 m_2 m_4 m_5$$

$$F(x, y, z) = \pi(0, 2, 4, 5)$$

فصل دوم:

ساده سازی تابع با استفاده از نقشه کارنو

اساس کار نقشه کارنو بر مبنای فاکتورگیری و حذف متغیرها برای ساده تر

شدن مدار منطقی است

\* ویژگی های نقشه کارنو:

الف) هر خانه آن مربوط به یک حالت ورودی یا به عبارت دیگر یک جمله از تابع

استاندارد بول است

ب) در دو خانه مجاور در جهت افقی یا عمودی همواره دو جمله ای قرار می گیرند

که فقط در یک متغیر با هم اختلاف دارند



(۱۷)

Year.

Month.

Date.

Subject

		<u>y</u>	
		0	1
<u>x</u>	0	$x'y'$	$x'y$
	1	$xy'$	$xy$

$m_0$	$m_1$
$m_2$	$m_3$

\* نقشه کابو دو متغیره

(ب)

(الف)

نقشه دو متغیره در شکل (الف) نشان داده شده است. در این نقشه چهار متغیر برای دو

متغیر وجود دارد از این دو نقشه مشکل از چهار متغیر است که هر یک متعلق به یک متغیر

می باشد نقشه (ب) برای نمایش ارتباط بین مربعات دو متغیر  $x$  و  $y$  دوباره ترسیم

شده است. 0 و 1 موجود در هر سطری ستون مقدار متغیر را نشان می دهند متغیر  $x$

در سطر 0 یک دارد و در سطر 1 بدون یک است

\* نقشه کابو سه متغیره: برای سه متغیر هست متغیر وجود دارد بنابراین

x \ yz	yz			
	00	01	11	10
x	0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$xy'z'$
	1	$xy'z'$	$xy'z$	$xyz'$

x \ yz	yz			
	00	01	11	10
x	0	$m_0$	$m_1$	$m_3$
	1	$m_4$	$m_5$	$m_7$

نقشه از هشت مربع تشکیل یافته است.

مثال) تابع بولی زیر را ساده کنید.

$$F(x, y, z) = \sum (2, 3, 4, 5)$$

x \ yz	yz			
	00	01	11	10
x	0		1	1
	1	1	1	



(12)

Year. \_\_\_\_\_ Month. \_\_\_\_\_ Data. \_\_\_\_\_

Subject \_\_\_\_\_

مثال) تابع بولی زیر را ساده کنید

$$F(x, y, z) = \sum (1, 2, 5, 6)$$

$$F = yz' + y'z$$

x \ yz	00	01	11	10
0		1		1
1		1		1

$\downarrow$   $yz$        $\rightarrow yz'$

مثال) تابع بولی زیر را ساده کنید

$$F(x, y, z) = \sum (3, 4, 6, 7)$$

x \ yz	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	1

$\downarrow$   $yz$        $\rightarrow xz'$

$$F = yz + xz'$$

در این شکل چهار مربع با 1 علامت خورده اند

که هر کدام متعلق به یک مinterm است. در مربع همجوار در ستون سوم با هم ترکیب شده اند تا جمله

دو استرال  $yz$  را بوجود آورند. در مربع باقیمانده نیز همجوارند و در ستون دوم با هم ترکیب شدند تا جمله

شده اند این دو مربع وقتی ترکیب شوند جمله دو استرالی  $xz'$  را بوجود می آورند.

(۱۳)

Subject \_\_\_\_\_

Year. \_\_\_\_\_ Month. \_\_\_\_\_ Data. \_\_\_\_\_

مثال (تابع بول را ساده کنید)

$$F = \bar{A}C + \bar{A}B + A\bar{B}C + BC$$

الف) آن را به مجموع ضمیمه ها نشان دهید

	BC			
	00	01	11	10
A				
0		1	1	1
1		1	1	

ب) سه عبارت مجموع حاضر را

 $\bar{A}B$ 

حاصل و ساده کنید

$$F = \bar{A}C(B+B') + \bar{A}B(C+C') + A\bar{B}C + BC(A+A')$$

$$\bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}BC' + A\bar{B}C + ABC + \bar{A}BC$$

\* جملات اضافی را حذف کنیم

$$F = \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC' + A\bar{B}C + ABC$$

تابع را طبق نقشه ما متغیره بالا ساده کنیم

$$F = C + \bar{A}B$$